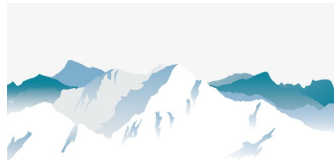


Induction



26 mars 2019

Damien Morard

Au cours de cette séance vous écrierez des définitions inductives et des preuves par récurrence.

Exercice 1 : Bien construire une preuve inductive

L'induction est un concept que nous découvrons souvent à partir des mathématiques. Il devient alors difficile de visualiser comment une preuve par induction fonctionne quand nous sort des entiers. De plus la manière dont nous allons faire nos preuves par rapport à l'approche mathématique sera syntaxiquement différente.

Nous allons voir ensemble toutes les étapes nécessaires à la création d'une preuve, et comment exprimer les différents cas.

Point **important**, si vous avez bien assimilé la programmation logique, la déduction des cas en sera plus simple (ce sont nos **Faits**).

Détaillons ensemble les étapes nécessaires à une preuve par induction.

- Exprimer la propriété à prouver
- Déterminer et prouver le cas de base
- Déterminer le cas successeur
- Supposer l'hypothèse vrai pour prouver le successeur
- Prouver le cas successeur à l'aide de l'hypothèse
- Conclure

Il est essentiel de détailler et d'expliquer toutes vos étapes. Faites des phrases complètes ! Toutes vos preuves doivent avoir ce format !



Quand vous prouvez une propriété, il vous faut utiliser les **facts** et les **rules** sous la forme de règle d'inférence.



Reprenons la définition des entiers pairs disponible dans le cours.












$$\frac{}{0 \in \text{EP}} \quad , \quad \frac{x \in \text{EP}}{x + 2 \in \text{EP}}$$

1. Prouvez par récursivité la propriété, $P(x) = x$ est pair en suivant méthodiquement les étapes explicitées précédemment.



Exercice 2 : Définition inductive

Nous définissons ci-dessous un troupeau (qui est en réalité une file) de vaches. Les vaches sont séparées par de l'herbe () . La file se termine par un arbre () .

-  \in troupeau
- $v \in \{ \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{F}, \dots, \mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \} \implies v \text{  } t \in \text{troupeau}$

1. La liste « » est-elle un élément de troupeau ?
2. Quelle est la condition requise pour qu'elle n'en fasse pas partie ?

On considère maintenant la définition inductive :

$$\frac{v \in \{ \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{F}, \dots, \mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \} \quad t \in \text{troupeau}}{\text{} \in \text{troupeau} \quad , \quad v \text{  } t \in \text{troupeau}}$$

3. Donnez la définition de $nb : \text{troupeau} \rightarrow \mathbb{N}$ qui retourne la taille d'un troupeau.
4. À partir de la définition de nb , prouvez par récurrence que la taille d'un troupeau est toujours positive ou nulle.

Exercice 3 : Palindromes

Les palindromes¹ sont des mots qui peuvent se lire aussi bien de gauche à droite, que de droite à gauche. Par exemple (on ne tient pas compte ici des accents, des majuscules, des espaces ou de la ponctuation) :

- « Élu par cette crapule. »
- « Engage le jeu que je le gagne. »
- « À l'étape, épate-la ! »
- « Tu l'as trop écrasé, César, ce Port-Salut ! »

Nous souhaitons faire des palindromes de vaches \mathbf{A} et \mathbf{B} uniquement ; par exemple \mathbf{AA} , \mathbf{ABBA} , mais pas $\mathbf{ALETAPPEEPATELA}$. (Palindromes composés uniquement de \mathbf{A} et \mathbf{B} . Il n'y a pas à tenir compte de la signification des mots.

1. Donnez une définition inductive de l'ensemble des palindromes **palyndromes** sur l'alphabet $\{ \mathbf{A}, \mathbf{B} \}$. Le mot vide s'écrit ϵ , et est évidemment un palindrome.
2. Donnez la définition de $nb_{\mathbf{A}} : \text{palindromes} \rightarrow \mathbb{N}$ qui retourne le nombre d'occurrences de la lettre \mathbf{A} dans le palindrome. De même écrivez $nb_{\mathbf{B}}$ qui compte le nombre de \mathbf{B} .
3. Prouvez qu'un palindrome ne peut contenir *à la fois* un nombre impair de \mathbf{A} et un nombre impair de \mathbf{B} . Pour cela, vous vous aiderez de $nb_{\mathbf{A}}$ et de $nb_{\mathbf{B}}$.


1. <http://fr.wikipedia.org/wiki/Palindrome>

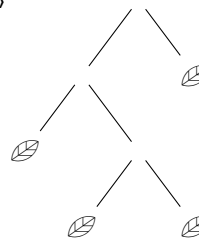
Exercice 4 : Arbres binaires

Les vaches aiment grimper aux arbres :

« Les pompiers de Saint-Benoît, en France, croyaient avoir tout vu et tout entendu lorsqu'ils ont reçu un appel pour le sauvetage d'une vache prise dans un arbre. La pauvre bête qui s'était aventurée le long d'une paroi rocheuse s'est ainsi retrouvée dans un arbre après avoir glissé.

Une équipe spéciale a été dépêchée sur place pour tenter de sauver la vache. Mais cette dernière, paniquée et déséquilibrée, a lourdement chuté de son perchoir. Elle n'a pu être sauvée à temps. »

Les arbres binaires sont des structures très utilisées en informatique, car elles permettent de rechercher rapidement des données. Un arbre est une feuille, notée , ou bien un nœud $\langle g, d \rangle$ dont les deux successeurs g et d sont des arbres. Un exemple d'arbre binaire vous est donné ci-dessous.



1. Donnez la définition inductive de A , l'ensemble des arbres binaires.
2. Prouvez que le nombre $n(a)$ de nœuds d'un arbre a est donné par la formule $1 + n(g) + n(d)$, où g et d sont les deux fils de l'arbre a .
3. Prouvez que la hauteur $h(a)$ d'un arbre a est donnée par la formule $1 + \max(h(g), h(d))$, où g et d sont les deux fils de l'arbre a .
4. Prouvez que la hauteur d'un arbre est toujours inférieure ou égale à son nombre de nœuds.

