

Sémantique élémentaire des langages: sémantiques d'expressions arithmétiques

Didier Buchs

Université de Genève

5 mars 2018

Sémantique d'expression arithmétique

- Sémantique d'évaluation (dénotationnelle)
- Sémantique computationnelle
- Sémantique concrete

Syntaxe des expressions arithmétiques

Definition (Expressions arithmétiques)

- Les expressions doivent être construites sur les nombres et sur les opérateurs usuels.
- $Exp = T_{\{+, -, *, /\}}(\mathbb{N})$

Exemple :

$$\begin{aligned} (3 * 4) + 2 &\in T_{\{+, -, *, /\}}(\mathbb{N}) \\ 3 * (4 + 2) &\in T_{\{+, -, *, /\}}(\mathbb{N})^1 \end{aligned}$$

Exercice

Construire les termes décrivant les listes.

$$OP = \{ _ :: _, _ ! _, rem, size, [] \} \quad type = \{ liste, nat \}$$

$$\mu (_ :: _) = (nat\ liste, liste)$$

$$\mu (_ ! _) = (liste\ liste, liste)$$

$$\mu ([]) = (\varepsilon, liste)$$

$$\mu (rem) = (liste\ nat, liste)$$

$$\mu (size) = (liste, nat)$$

$$Top(\emptyset) = \left\{ [], \begin{matrix} size([]) \\ [] \end{matrix} \right\}$$

$$Top([N]) = \left\{ [], \begin{matrix} [] \\ 0 :: [], \dots \\ size([]) \end{matrix} \right\}$$

$$Val(nat) = \left\{ \underbrace{0, 1, 2, \dots}_{\mathbb{N}} \right\}$$

4/40

Sémantique d'évaluation des expressions arithmétiques

- Les expressions doivent être évaluées sur les nombres.
- La relation d'évaluation détermine une relation :
 $eval \subseteq Exp \times \mathbb{N}$
- Notation : $e \in Exp = T_{\{+, -, *, /\}}(\mathbb{N})$ et $n \in \mathbb{N}$ alors on note
 $e \Rightarrow n \Leftrightarrow (e, n) \in eval$

big step
semantics

Definition (Sémantique d'évaluation)

$e \in Exp = T_{\{+, -, *, /\}}(\mathbb{N})$ et $n \in \mathbb{N}$

$+_{\mathbb{N}}, *_{\mathbb{N}}, -_{\mathbb{N}}, /_{\mathbb{N}}$ sont les fonctions sur \mathbb{N}

R Constante : $\frac{}{n \Rightarrow n}$

$R+ : \frac{e \Rightarrow n, e' \Rightarrow n'}{e + e' \Rightarrow n +_{\mathbb{N}} n'}$

$R- : \frac{e \Rightarrow n, e' \Rightarrow n'}{e - e' \Rightarrow n -_{\mathbb{N}} n'}$

$R* : \frac{e \Rightarrow n, e' \Rightarrow n'}{e * e' \Rightarrow n *_{\mathbb{N}} n'}$

$R/ : \frac{e \Rightarrow n, e' \Rightarrow n'}{e / e' \Rightarrow n /_{\mathbb{N}} n'}$

garant sur les entiers

Symbol
+

Evaluation d'une expression arithmétique

Exemple

Soit l'expression $3 * 4$ à évaluer

domaine
syntaxique

$$\frac{3 \Rightarrow 3, 4 \Rightarrow 4}{3 * 4 \Rightarrow 12}$$

Soit l'expression $(3 * 4) + 1$ à évaluer

$$\frac{\frac{3 \Rightarrow 3, 4 \Rightarrow 4}{3 * 4 \Rightarrow 12}, 1 \Rightarrow 1}{(3 * 4) + 1 \Rightarrow 13}$$

$3 * 4$

valeur sémantique

"

domaine sémantique

Exercice : Evaluation d'une expression arithmétique

Propriété de la sémantique d'évaluation des expressions arithmétiques

Theorem (Unicité de la Sémantique d'évaluation)

$\forall e \in \text{Exp} = T_{\{+, -, *, /\}}(\mathbb{N})$ et $n, n' \in \mathbb{N}$
 $e \Rightarrow n, e \Rightarrow n' \Rightarrow n = n'$

si l'expression est définie



Démonstration.

• $P(x) = \{x \Rightarrow n \wedge x \Rightarrow n' \Rightarrow n = n'\}$

• $P(n)$

• Hyp. $P(e)$ et $P(e')$ vérifiée alors

• $P(e + e')$

• $P(e - e')$

• $P(e * e')$

• $P(e / e')$

$\rightarrow \mathbb{R}_+$

$e \Rightarrow m \quad e' \Rightarrow n'$

$e + e' \Rightarrow m + n'$

unique

car + ne se fait qu'une fois

au domaine de définition!

Propriété de la sémantique d'évaluation des expressions arithmétiques - 2

Theorem (Existence de la Sémantique d'évaluation)

$\forall e \in \text{Exp} = T_{\{+, -, *, /\}}(\mathbb{N})$ il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. $e \implies n$

Démonstration.

- $P(x) = \{\exists k \in \mathbb{N}, x \implies k\}$



? $+, -, *, /$ doivent
être totales (définies partout)

Exercice : sémantique d'un véhicule programmable

Les mouvements possibles : $M = \{\underline{L}, R, F\}$

L = gauche
 R = droit
 F = en avant

Un programme est une liste construite avec (concaténation $::$, liste vide ϵ) de telles instructions.

Les programmes sont donc des termes :

$$T_{\{\epsilon, ::\}}(\{L, R, F\}) = T_{\{\epsilon, ::\}}(M)$$

Par exemple : suivre un carré correspond au programme :

$square = F :: R :: F :: R :: F :: R :: F :: R :: \epsilon$



$(0,0)$

Exercice : sémantique d'un véhicule programmable(suite)

Comment donner une sémantique à ce langage ?

- il faut fixer un domaine sémantique et
- définir des règles pour définir une sémantique d'évaluation.

position et direction

Exercice : sémantique d'un véhicule programmable (suite)

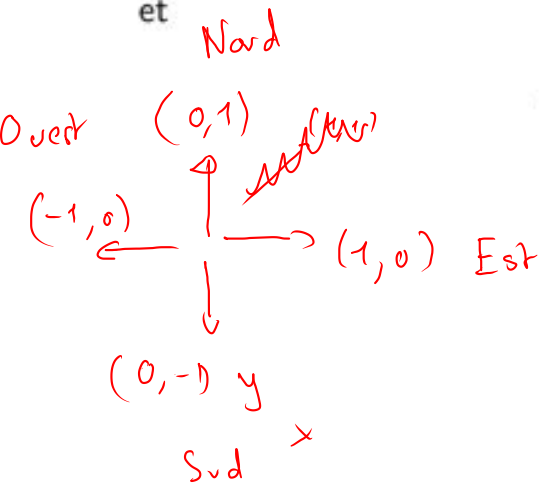
Le domaine sémantique est composé de :

position \in Direct \times Coord où

$$\text{Direct} = \{-1, 0, 1\} \times \{-1, 0, 1\} = \{-1, 0, 1\}^2$$

et

$$\text{Coord} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$



Exercice : sémantique d'un véhicule programmable(suite)

La relation de transition pour une instruction est donc :

$(Direct \times Coord) \times M \times (Direct \times Coord)$ notée $\langle d, p \rangle, m \Rightarrow \langle d, p \rangle$

Les règles pour les actions élémentaires :

- $\frac{}{\langle d, p \rangle, L \Rightarrow \langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * d, p \rangle}$ *changer la direction -90°*
- $\frac{}{\langle d, p \rangle, R \Rightarrow \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} * d, p \rangle}$ *90°*
- $\frac{}{\langle d, p \rangle, F \Rightarrow \langle d, p + d \rangle}$ *avancer*

Exercice : sémantique d'un véhicule programmable (suite)

Pour les programmes comme succession d'instruction :

La relation est étendue

$$(Direct \times Coord) \times T_{\{\epsilon, :: \}}(M) \times Direct \times Coord$$

$$\frac{\langle d, p \rangle, mov \Rightarrow \langle d', p' \rangle, \langle d', p' \rangle, prog \Rightarrow \langle d'', p'' \rangle}{\langle d, p \rangle, mov :: prog \Rightarrow \langle d'', p'' \rangle}$$

$$\langle d, p \rangle, \epsilon \Rightarrow \langle d, p \rangle$$

Exercice : sémantique d'un véhicule programmable (suite)

Question : Prouver que $\forall p, d : \langle \underline{p}, d \rangle, \text{square} \rightarrow \langle d, p \rangle$

↑ programme de la page 10

les quatres rotations successives donnent :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^4 * d = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * d \quad \checkmark$$

les mouvements induisent la nouvelle position :

$$p = p + d + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^1 * d + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 * d + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^3 * d$$

$$p = p + \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^1 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^3 \right) * d$$

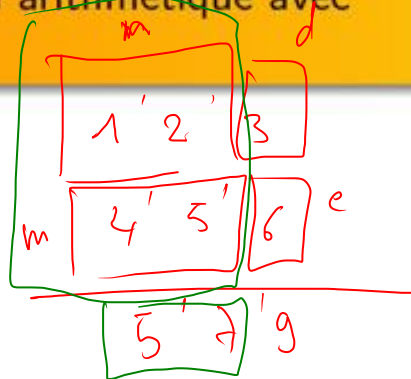
$$p = p + \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) * d$$

$$p = p + \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) * d \quad \checkmark$$

Exercice : Evaluation d'une expression arithmétique avec des chiffres

123 + 456

chaîne de caractères



nombre \equiv liste de chiffres (avec au moins un chiffre)

chiffre $\equiv 0 | 1 | 2 | 3 | \dots | 9$

Correction : Evaluation d'une expression arithmétique avec des chiffres

$$\begin{array}{lll} \overline{0 \in Ch} & \overline{1 \in Ch} & \overline{2 \in Ch} \\ \overline{3 \in Ch} & \overline{4 \in Ch} & \overline{5 \in Ch} \\ \overline{6 \in Ch} & \overline{7 \in Ch} & \overline{8 \in Ch} \\ \overline{9 \in Ch} & \frac{n \in Ch}{n \in Num} & \frac{n \in Ch, m \in Num}{m' n \in Num} \end{array}$$

$$\begin{aligned} & 1' (2' 3) \\ & 0' (0' (1' (2' 3))) \end{aligned}$$

Il s'agit de construire la relation : $T_{\{+\}}(Num) \Rightarrow Num$
 Table de calcul sur les chiffres!! $T_{\{+\}}(Ch) \Rightarrow Num$

$\overline{0 + 0 \Rightarrow 0}$	$\overline{0 + 1 \Rightarrow 1 \dots}$	$\overline{0 + 9 \Rightarrow 9}$
$\overline{1 + 0 \Rightarrow 0}$	$\overline{1 + 1 \Rightarrow 1 \dots}$	$\overline{1 + 9 \Rightarrow 1'0}$
...
$\overline{9 + 0 \Rightarrow 9}$	$\overline{9 + 1 \Rightarrow 1'0 \dots}$	$\overline{9 + 9 \Rightarrow 1'8}$

} 100
 en v.
 la suite
 aux valeurs

chiffres + chiffres \Rightarrow ~~chiffres~~
 un

diffen

$n, m \in \mathbb{N}_{br}$
 $e, d \in Ch$
 $r \in Ch$

$$d + e \Rightarrow r, \quad n + m \Rightarrow s$$

$$\begin{array}{c} n' d + m' e \Rightarrow s' r \\ \uparrow \\ nb \end{array} \quad \triangle \begin{array}{c} 1st \text{ on } \\ hbr \end{array}$$

$$d + e \Rightarrow 1' r, \quad n + m \Rightarrow s, \quad s + 1 \Rightarrow t$$

$$n' d + m' e \Rightarrow t' r$$

$$\begin{array}{r} 9'9 \\ 7'5 \\ \hline \end{array} \quad \checkmark$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ 7'5 \\ \hline \end{array}$$

Règles de l'addition décimale

$$\frac{n + m \Rightarrow k, k \in Ch, c + d \Rightarrow r}{c'n + d'm \Rightarrow r'k}$$

Avec la retenue !!

$$\frac{n + m \Rightarrow ret'k, k \in Ch, c + d \Rightarrow rr, rr + ret \Rightarrow r}{c'n + d'm \Rightarrow r'k}$$

Longueur différente (opérande droite plus longue)

$$\frac{n + m \Rightarrow k, k \in Ch, n \in Ch}{n + d'm \Rightarrow d'k}$$

$$\frac{n + m \Rightarrow ret'k, k \in Ch, n \in Ch, d + ret \Rightarrow r}{n + d'm \Rightarrow r'k}$$

Inverser
des chiffres
et unifier

idem opérande gauche plus longue ...

Typage : syntaxe

Il s'agit d'introduire une notion simple de type :

- Un type est attribué à chaque expression, T est l'ensemble des types.

- La compatibilité est liée aux noms.

(compatibilité forte)

- un ensemble OP des opérateurs est fournis.

- le profil des opérateurs est indiqué par la fonction

$$\mu : \underline{OP} \rightarrow T^* \times T$$

- i.e. $\mu(op) = t_1, \dots, t_n, s$

$$T = \{ \text{char}, \text{string}, \text{nat} \}$$

$$\mu(+)= (\text{nat nat}, \text{nat})$$

Typage : sémantique

$$(1+3) \times (4+2)$$

Domaine d'évaluation :

- chaque type $t \in T$ a un domaine de valeurs, $Dom(t)$
- chaque opérateur op a une correspondance sémantique op_t .
- si $\mu(op) = t_1 t_2 \dots t_n$, t alors

$$Dom(nat) = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$Dom(bool) = \{t, f\}$$

Semantique
pour C
type

$$op_t : Dom(t_1) \times Dom(t_2) \times \dots \times Dom(t_n) \rightarrow Dom(t)$$

Nous allons donc déduire/construire la relation :

$$T \vdash e \Rightarrow v : t$$

où :

$$t \in T, v \in Dom(t), e \in Exp$$

$$e : t \Rightarrow v \in Dom(t)$$

Syntaxe
 \vdash
 OP, \vdash_{op}
 \wedge

Semantique
 $Dom(nat) \dots$
 $OP_t \text{ ex: } +, \dots$

21/40

Typage : règles

Definition (Sémantique d'évaluation typée)

$e \in \text{Exp} = \text{TOP}(\emptyset)$

op sont les fonctions sur les types

$\mu(\emptyset) : (\varepsilon, \text{nat})$

constant

R Constante : $\frac{n \in OP, \mu(n) = \langle t \rangle, t \in T}{T \vdash n \Rightarrow n_t : t}$

Rop2 : $\frac{op \in OP, \mu(op) = t_1 t_2 t, T \vdash e \Rightarrow n : t_1, T \vdash e' \Rightarrow n' : t_2}{T \vdash e \text{ op } e' \Rightarrow n \text{ op}_t n' : t}$

↑
opérateur binaire

2.0/3
règle de
cohérence

'int' est compatible avec 'double' en C

$\frac{T \vdash e \Rightarrow v : \cancel{\text{int}}}{T \vdash e \Rightarrow v : \cancel{\text{double}}}$

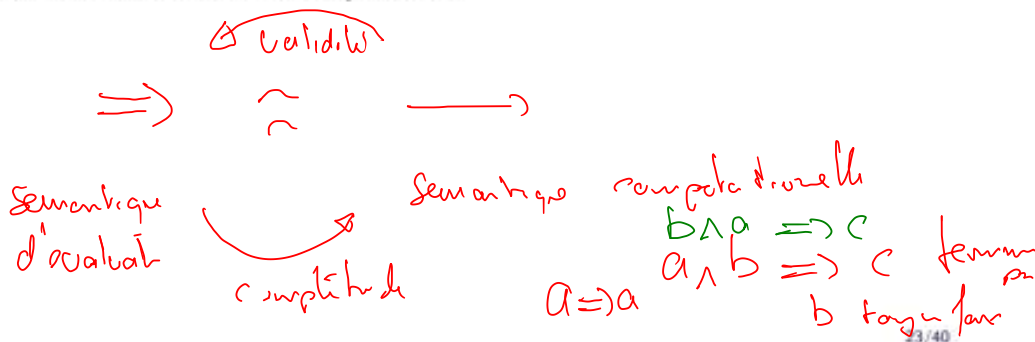
2.0/3
⚠

Sémantique computationnelle des expressions arithmétiques

- Calcul de l'effet de chaque étapes intermédiaires
- Forme de sémantique mettant en évidence les calculs effectifs
- La stratégie devient explicite

Nous allons :

- Donner les règles pour l'exemple des expressions arithmétiques
- Montrer leur validité et complétude



23/40

Sémantique computationnelle des expressions arithmétiques

- La relation d'un pas d'évaluation détermine un système de transition : $comp \subseteq Exp \times Exp$
- Notation : $e \in Exp = T_{\{+, -, *, /\}}(\mathbb{N})$ et $n \in \mathbb{N}$ alors on note $e \longrightarrow n \Leftrightarrow (e, n) \in comp$

Definition (Sémantique computationnelle)

$e, e', e'' \in Exp = T_{\{+, -, *, /\}}(\mathbb{N})$ et $n, n' \in \mathbb{N}$ et $+_{\mathbb{N}}, *_{\mathbb{N}}, -_{\mathbb{N}}, /_{\mathbb{N}}$ sont les fonctions sur \mathbb{N}

$$RC+ : \frac{}{n + n' \longrightarrow n +_{\mathbb{N}} n'}$$

$$RC* : \frac{}{n * n' \longrightarrow n *_{\mathbb{N}} n'}$$

$$RC- : \frac{}{n - n' \longrightarrow n -_{\mathbb{N}} n'}$$

$$RC/ : \frac{}{n / n' \longrightarrow n /_{\mathbb{N}} n'}$$

$$\forall op \in \{+, -, *, /\}$$

$$RCL : \frac{e \longrightarrow e''}{e \text{ op } e' \longrightarrow e'' \text{ op } e'}$$

$$RCR : \frac{e' \longrightarrow e''}{e \text{ op } e' \longrightarrow e \text{ op } e''}$$

Shobque
gawth

Shobque
gawth

Calcul d'une expression arithmétique

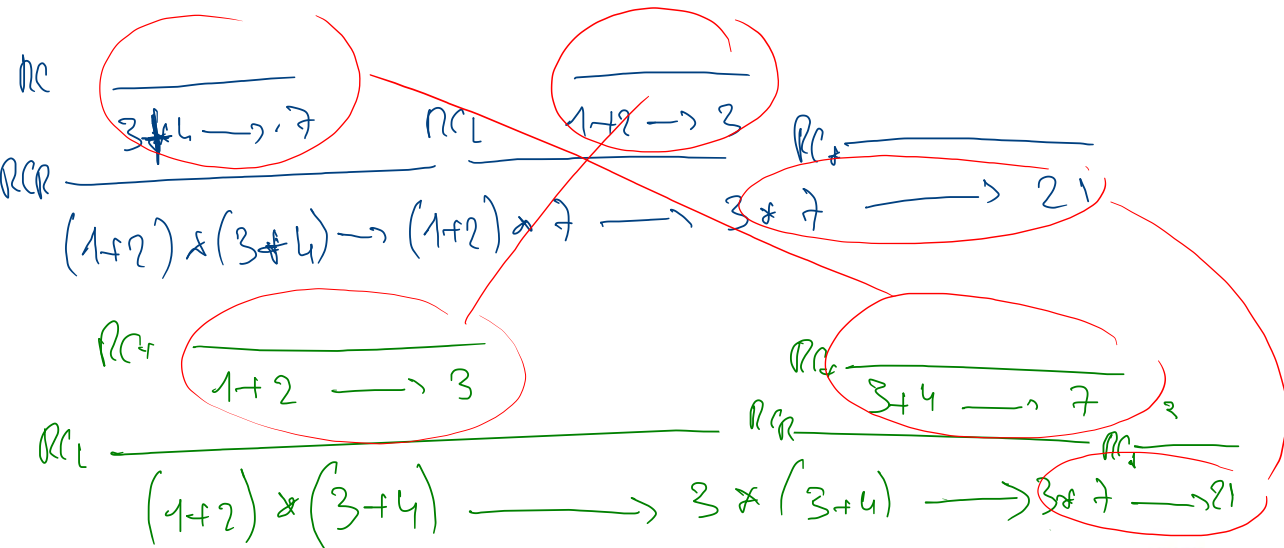
Exemple

Soit l'expression $(3 * 4) + 1$ à calculer

Solution :

$$\begin{array}{l} \text{RC}_L \quad \text{RC}_* \quad \text{RC}_+ \\ \frac{3 * 4 \longrightarrow 12}{(3 * 4) + 1 \longrightarrow 12 + 1} \quad \frac{12 + 1 \longrightarrow 13}{12 + 1 \longrightarrow 13} \end{array}$$

Exercice : calcul d'une expression arithmétique



Non-déterminisme

Constat : il y a différentes dérivations possibles, c'est le non déterminisme de l'application de RCL et RCR, il s'agit de voir si cela implique un résultat de calcul différent ?

Definition (Fermeture transitive)

soit \rightarrow un système de transition la fermeture transitive \rightarrow^* est une relation satisfaisant les propriétés suivantes :

$$RCB : \frac{e \rightarrow e'}{e \rightarrow^* e'} \quad RCI : \frac{e \rightarrow^* e'', e'' \rightarrow e'}{e \rightarrow^* e'}$$



Forme canonique

L'application des règles construit une suite de réduction, lorsqu'il n'y a plus de réduction possibles nous parlons de forme irréductibles (ou canonique).

Definition (Forme canonique)

soit \longrightarrow un système de transition la relation canonique \rightsquigarrow est une relation satisfaisant les propriétés suivantes :

$$RCanon : \frac{e \longrightarrow^* e', e' \not\longrightarrow e''}{e \rightsquigarrow e'}$$
$$RBase : \frac{}{n \rightsquigarrow n}$$

@ lexpauem

$n \in \mathbb{N}$



Propriété de la sémantique computationnelle des expressions arithmétiques

Theorem (Confluence de la Sémantique computationnelle)

$\forall e \in \text{Exp} = T_{\{+,-,*,/\}}(\mathbb{N})$ et $\exists e' \in \text{Exp}$ et $\exists n \in \mathbb{N}$
 $e \rightsquigarrow e' \Leftrightarrow e' = n$

Démonstration.

- \Rightarrow contraposée
- \Leftarrow direct



Validité et complétude de la sémantique computationnelle des expressions arithmétiques

Theorem (Validité et complétude de la Sémantique computationnelle)

$\forall e \in Exp = T_{\{+,-,*, /\}}(\mathbb{N})$ et $\exists n \in \mathbb{N}$
 $e \Rightarrow n \Leftrightarrow e \rightsquigarrow n$

Démonstration.

- \Rightarrow par induction
- \Leftarrow par induction



Reprise exercice : sémantique d'un véhicule programmable

Pour les programmes comme succession d'instruction nous avons :

La relation est étendue

$$(Direct \times Coord) \times T_{\{\epsilon, \dots\}}(M) \times Direct \times Coord$$

Il faut dans une sémantique par pas que :

$$(Direct \times Coord) \times T_{\{\epsilon, \dots\}}(M) \times Direct \times Coord \times T_{\{\epsilon, \dots\}}(M)$$

La règle était :

$$\frac{\langle d, p \rangle, mov \Rightarrow \langle d', p' \rangle, \langle d', p' \rangle, prog \Rightarrow \langle d'', p'' \rangle}{\langle d, p \rangle, mov :: prog \Rightarrow \langle d'', p'' \rangle}$$

La règle devient :

$$\frac{\langle d, p \rangle, mov \Rightarrow \langle d', p' \rangle}{\langle d, p \rangle, mov :: prog \rightarrow \langle d', p' \rangle, prog}$$

prog = $m_1 ; m_2 ; m_3$

$p, m_1 ; m_2 ; m_3 \longrightarrow p', m_2 ; m_3$

$\longrightarrow p'', m_3 \longrightarrow p''', \epsilon$

Reprise exercice : sémantique d'un véhicule programmable(2)

Definition (Fermeture transitive)

soit \rightarrow un système de transition la fermeture transitive \rightarrow^* est une relation satisfaisant les propriétés suivantes :

$$RCB : \frac{\langle d, p \rangle, prog \rightarrow \langle d', p' \rangle, prog'}{\langle d, p \rangle, prog \rightarrow^* \langle d', p' \rangle, prog'}$$

$$RCI : \frac{\langle d, p \rangle, prog \rightarrow^* \langle d'', p'' \rangle, prog'' \rightarrow \langle d', p' \rangle, prog'}{\langle d, p \rangle, prog \rightarrow^* \langle d', p' \rangle, prog'}$$

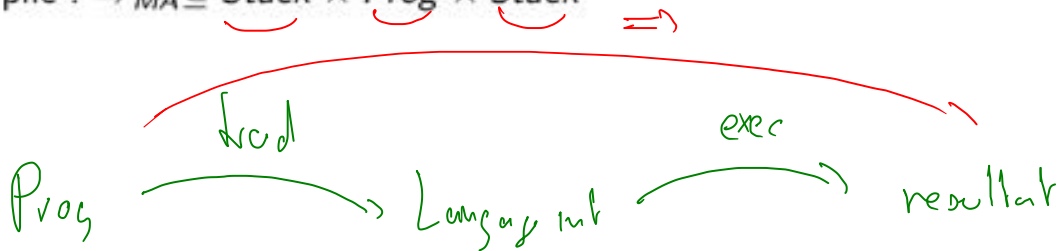
Theorem (La forme canonique a la propriété)

$$RCanon : \frac{\langle d, p \rangle, prog \rightarrow^* \langle d', p' \rangle \epsilon}{\langle d, p \rangle, prog \rightsquigarrow \langle d', p' \rangle}$$

Sémantique concrète des expressions arithmétiques

Il s'agit de la sémantique classique d'un langage fournie par son compilateur ! Dans notre exemple nous idéaliserons le compilateur ainsi que la machine abstraite d'exécution. Le processus de calcul est donc décomposé en :

- La traduction des expressions en programmes de la machine abstraite : $\Rightarrow_{\text{Trad}} \subseteq \underline{\text{Exp}} \times \underline{\text{Prog}}$
- l'exécution du programme de la machine abstraite sur une pile : $\Rightarrow_{\text{MA}} \subseteq \underline{\text{Stack}} \times \underline{\text{Prog}} \times \underline{\text{Stack}}$



Syntaxe concrète d'une machine abstraite

La machine abstraite pour notre exemple implémente une pile pour le calcul des expressions : Les instructions de la machine abstraite :

- $Push : \mathbb{N} \rightarrow Instruction$
- $Pop : \rightarrow Instruction$
- $Apply(+) : \rightarrow Instruction$
- $Apply(*) : \rightarrow Instruction$
- $Apply(-) : \rightarrow Instruction$
- $Apply(/) : \rightarrow Instruction$

Instruction

Un programme est une suite d'instruction :

- $;; : Prog, Instruction \rightarrow Prog$
- noop : $\rightarrow Prog$

programme vide !

Sémantique opérationnelle d'évaluation de la machine abstraite (1)

Il s'agit de donner un domaine sémantique à la fonction d'évaluation, ici on choisit une d'une pile d'entier engendrée par les opérations $[]$ et $::$ (pile vide et concaténation) : $Stack = T_{\{[], ::\}}(\mathbb{N})$

Definition (Sémantique machine abstraite (1))

$p \in Stack$ et $n, n' \in \mathbb{N}$

$$RPush : \frac{}{p \xRightarrow{Push(n)} p :: n}$$

$$RPop : \frac{}{p :: n \xRightarrow{Pop(n)} p}$$

$$([] :: a) :: b \xRightarrow{Apply(+)} [] :: (a+b)$$

Sémantique opérationnelle d'évaluation de la machine abstraite(2)

Definition (Sémantique machine abstraite (2))

$p \in Stack$ et $n, n' \in \mathbb{N}$ et $+_N, *_N, -_N, /_N$ sont les fonctions sur \mathbb{N}

$$\forall op \in \{+, -, *, /\}$$

$$RAp \frac{}{p :: n :: n' \xRightarrow{Apply(op)} p :: n \ op_N \ n'}$$

$$Rvide : \frac{}{p \xRightarrow{noop} p}$$

$$RSeq : \frac{p \xRightarrow{prog} p', p' \xRightarrow{i} p''}{p \xRightarrow{prog;i} p''}$$

Exemple : programme machine

$$\overline{[\]_{\text{noop}}} \xrightarrow{\text{Push}(3)} [\] \Rightarrow [\] :: 3$$

$$[\] \xrightarrow{\text{noop Push}(3)} [\] :: 3 \xrightarrow{\text{Push}(2)} [\] :: 3 :: 2$$

$$[\]_{\text{noop}, \text{Push}(3), \text{Push}(2)} \xrightarrow{\text{Apply } +} [\] :: 3 :: 2 \Rightarrow [\] :: 5$$

$$\boxed{\text{noop; Push}(3); \text{Push}(2); \text{Apply}(+)} \Rightarrow [\] :: 5$$

Sémantique par traduction des expressions arithmétiques

Une manière simple et efficace de fournir une sémantique consiste en la traduction de ce langage en un autre langage dont on connaît un mécanisme d'évaluation.

Definition (Sémantique traduction)

$prog, prog' \in Prog$ et $n, n' \in \mathbb{N}$

$$RTMA_n : \frac{}{n \Rightarrow_{Trad} noop; Push(n)} \\ \forall op \in \{+, -, *, /\}$$

$$RTMAP_{prog} : \frac{e \Rightarrow_{Trad} prog, e' \Rightarrow_{Trad} prog'}{e \ op \ e' \Rightarrow_{Trad} prog; prog'; Apply(op)}$$

Correction de la sémantique par traduction

Afin d'assurer la correction du processus il faut que :

Theorem

$\forall e, \exists n, \exists \text{prog} \text{ t.q.}$

$$e \Rightarrow n \Leftrightarrow e \Rightarrow_{\text{Trad}} \text{prog} \wedge [] \xrightarrow{\text{prog}} [] :: n$$

(à prouver en exercice!!)

Remarque : L'opération $_; _ : \text{Prog}, \text{Instruction} \rightarrow \text{Prog}$ doit être étendue vers $_; _ : \text{Prog}, \text{Prog} \rightarrow \text{Prog}$

une optimisation : $\mathcal{O}_P(\text{prog}) = \text{prog}'$

$$(e \Rightarrow_{\text{Trad}} \text{prog}) \Rightarrow ([] \xrightarrow{\text{prog}} [] :: n) \stackrel{?}{\Leftrightarrow} \left(\mathcal{O}_P(\text{prog}) = \text{prog}' \wedge [] \xrightarrow{\text{prog}'} [] :: n \right)$$

Exercice