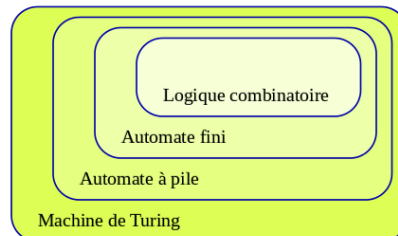


# Induction et formules logiques

Hiérarchie d'automates



26 mars 2019

Damien Morard

**Final date :** 8 avril 2019 à 23h59

**Files to include :** un fichier au format PDF `SL_TP_2_nom.pdf`. Ce fichier peut être le scan d'un manuscrit, ou produit par un logiciel de traitement de texte. Nous insistons sur la *lisibilité* du document.

Les TPs sont des travaux *personnels*, si deux solutions ont des similarités flagrantes les deux personnes auront 0.

La date et l'heure de rendu sont *strictes*, passer le délai d'une minute utilisera un joker (pour une journée supplémentaire). Une fois les deux jokers du semestre consommés et le délai dépassé, vous recevrez une note de 0. Bien entendu la date et l'heure de rendu sont toujours considérées au fuseau horaire de Genève.

Vous devez rendre votre travail sous format pdf !

Au cours de ce TP, vous réaliserez des preuves par induction. N'hésitez pas à utiliser les résultats des questions précédentes si cela vous semble pertinent.

Soit  $\Sigma$  un alphabet (ensemble de lettres) fini. On rappelle qu'un mot est une suite finie de lettres et qu'un langage est un ensemble de mots. La concaténation entre mots étant notée par '.', on l'étend aux langages :  $L_1.L_2 = \{u.v \mid u \in L_1 \text{ et } v \in L_2\}$ . Le mot vide étant noté  $\varepsilon$ , on remarque que  $\{\varepsilon\}$  est élément neutre pour la concaténation de langages. Pour un quelconque langage  $L$ ,  $L^0$  désigne  $\{\varepsilon\}$ ,  $L^1$  désigne  $L$  et  $L^{n+1} = L.L^n$  pour tout entier  $n$ . L'étoile (ou fermeture de Kleene) d'un langage est  $L^* = \cup_{n \in \mathbb{N}} L^n$ . On définit l'ensemble  $Rat(\Sigma)$  des langages rationnels sur  $\Sigma$  comme suit :

$$\begin{array}{ll}
1) \text{ Cas de base : } \frac{}{\emptyset \in \text{Rat}(\Sigma)} & 2) \text{ Singleton : } \frac{a \in \Sigma}{\{a\} \in \text{Rat}(\Sigma)} \\
3) \text{ Union : } \frac{L_1, L_2 \in \text{Rat}(\Sigma)}{L_1 \cup L_2 \in \text{Rat}(\Sigma)} & 4) \text{ Concat : } \frac{L_1, L_2 \in \text{Rat}(\Sigma)}{L_1.L_2 \in \text{Rat}(\Sigma)} \\
5) \text{ Diff : } \frac{L_1, L_2 \in \text{Rat}(\Sigma)}{L_1 \setminus L_2 \in \text{Rat}(\Sigma)} & 6) * : \frac{L \in \text{Rat}(\Sigma)}{L^* \in \text{Rat}(\Sigma)}
\end{array}$$

Au cours des prochains exercices, vous allez devoir raisonner par induction. Avant de commencer soyez sûr de comprendre ce qu'est le principe d'induction. Nous voulons prouver qu'une propriété est vraie, et ce peu importe les valeurs choisies. Pour faire une petite piqure de rappel l'induction se décompose ainsi :

- Poser/Exprimer la propriété que l'on veut prouver
- Prouver le cas initial
- Supposer l'hypothèse vraie et prouver le cas d'ordre supérieur

Avant de vous lancer dans les preuves, il est **essentiel** de bien définir le cas initial et inductif! Posez vous les bonnes questions! La lisibilité et le détail de vos preuves sont primordiaux!

## Exercice 1 : Langages finis



Un langage fini  $L_F$  est un set de strings, de cardinalité fini  $|L_F| < \infty$ . Un langage fini est donc, soit un langage composé d'aucun mot ( $\emptyset$ ), soit un langage composé d'un nombre fini de mots.

Nous voulons maintenant prouver par induction plusieurs propriétés.

1. Montrez par induction que toute union finie de langages rationnels est un langage rationnel.
2. Montrez par induction que toute concaténation finie de langages rationnels est un langage rationnel.
3. En déduire que le langage  $A_n$  des mots de longueur  $n$  est rationnel.
4. Déduire de même que tout langage fini est rationnel.

## Exercice 2 : Langages miroirs



Soit un mot  $u = a_1 \dots a_n \in \Sigma^*$ . Le miroir de  $u$  est le mot  $\tilde{u} = a_n \dots a_1$ . On définit le miroir d'un langage  $L$  comme  $Miroir(L) = \{\tilde{u} | u \in L\}$ .

1. Reprenez les règles d'inférences 1), 2), 3), 4) de la définition des langages rationnels, et utilisez les pour créer les règles d'inférences de ce qu'est un langage miroir. Vos règles d'inférences d'un langage miroir doivent s'appliquer sur n'importe quel langage.
2. À l'aide de vos règles d'inférences (et des précédentes), prouvez par induction sur la taille du langage que le miroir d'un langage rationnel est rationnel.

**Exercice 3 : Mots de taille fixe**

Pour tout langage  $L$  et tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $L_{\geq n}$  l'ensemble des mots de  $L$  de longueur au moins  $n$ .

1. Soit  $L$  un langage rationnel. Montrez que  $L_{\geq 0}$  est un langage rationnel.
2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose avoir prouvé que, pour tout  $p < n$  et tout langage rationnel  $L$ ,  $L_{\geq p}$  est un langage rationnel. Montrer, par induction sur  $L$ , que pour tout langage rationnel  $L$ ,  $L_{\geq n}$  est aussi rationnel.
3. À partir du résultat de la question 1.4, et de vos connaissances sur les langages rationnels, pouvez-vous établir une autre preuve de ce résultat sans induction ?

L'exercice 3 consiste en fait en une double induction : une induction sur  $n$ , dont le pas d'induction s'appuie une induction structurelle sur les langages. L'induction sur  $n$ , qui requiert de supposer que la propriété est vraie pour tout les  $p < n$ , est parfois appelée "induction forte". Il s'agit en fait du cas général de l'induction, l'induction "faible" où l'on prouve la propriété au rang  $n$  en la supposant vraie au rang  $n - 1$  n'en est qu'un cas particulier.